ՀՏԴ 37.02

Վիրտուալ տեղափոխությունների սկիզբունքի որոշ կիրառություններ ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի դասընթացում*

Վարդան Մանուկյան

DOI: https://doi.org/10.58726/27382923-ne2023.2-51

Հանգուցային բառեր. *խնդիր, ուժ, ստատիկա, աշխատանք, համանմանություն, անհավասարություն, ապացույց*

Նախաբան

Վիրտուալ տեղափոխությունների (կամ վիրտուալ աշխատանքի) սկզբունքը տեսական մեխանիկայի վարիացիոն սկզբունքներից է, որն ունի ոչ միայն գործնական, այլև կարևոր տեսական ֆիզիկական նշանակություն։ Վերջինս պայմանավորված է ֆիզիկայում էներգետիկ մոտեցումների կարևորությամբ, որոնց առնչվում է այս սկզբունքը։ Այս սկզբունքի խիստ և ամբողջական ապացույցը, ինչպես նաև դրա տարբեր կիրառությունները, կարող են դիտարկվել միայն հոծ միջավայրի մեխանիկայի կամ ինժեներական և կիրառական մեխանիկայի համալսարանական դասընթացներում։ Այնուամենայնիվ, եթե սկզբունքի էությունը մեկնաբանվի պարզ ձևով, ապա նույնիսկ դպրոցական ֆիզիկայի դասընթացի շրջանակում այն կարող է արդյունավետորեն օգտագործվել ստատիկայի խնդիրների լուծման գործընթացում։ Հարկ է նշել, որ ստատիկայի որոշ խնդիրներ շատ դժվար է լուծել ուժերի և մոմենտների հավասարակշռության ստանդարտ պայմանների քննարկման ճանապարհով։ Նման դեպքերում վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի կիրառումը դառնում է այդ խնդիրների լուծման գործնականում միակ հնարավոր մոտեցումը։ Հռչակավոր ֆիզիկոս Ռ. Ֆեյնմանը իր հայտնի դասախոսություններում ներկայացրել է վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքը էներգիայի պահպանման օրենքը մեկնաբանելիս և կոնդենսատորի թիթեղների միջև գործող ուժը որոշելիս [7]։ Բացի այդ, իր խմբի կողմից հեղինակած հայտնի խնդրագրքի ստատիկայի որոշ խնդիրներ նա առաջարկել է լուծել՝ կիրառելով հենց այդ սկզբունքը [8]։ [3] և [5] աշխատանքները ներկայացնում են վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի կիրառումը դպրոցական ֆիզիկայի որոշ խնդիրների լուծման գործընթացում։ [6, 59-87] գրքի մի ամբողջ գլուխ նվիրված է վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքին և դրա ֆիզիկական կիրառությանը։ Թեև նշված

* *Հետազոտությունն իրականացվել է ՀՀ գիտության կոմիտեի ֆինանսական աջակցությամբ՝ 21T-5C039 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում։*

սկզբունքը կարող է ունենալ հետաքրքիր կիրառություն, այն դեռ չի հասցրել պատշաճ տարածում ստանալ ֆիզիկայի դասավանդման գործընթացում: Սույն աշխատանքում, հաշվի առնելով սկզբունքի բովանդակային գեղեցկությունը և օգտակարությունը, փորձ է արված, մնալով դպրոցական ֆիզիկայի շրջանակում, հնարավորինս հիմնավոր և մատչելի կերպով ներկայացնել այն և ապա համակարգված կերպով բերել դրա կիրառությունները ստատիկայի աստիճանական բարդացման սկզբունքով կազմված խնդիրներում, ինչպես նաև մաթեմատիկական անհավասարումների լուծման գործընթացում, ինչն էլ հանդիսանում է աշխատանքի գիտամեթոդական նորույթը: Ստորև նախ կներկայացնենք վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքը, այն կլուսաբանենք պարզ օրինակով և ապա կդիտարկենք հոդակապային կախիչի վերաբերյալ մի խնդիր՝ իր զարգացումներով: Այնուհետև, փորձելով հաստատել որոշակի համանմանություններ, սույն սկզբունքի գաղափարները կփորձենք տարածել դպրոցական մաթեմատիկայի անհավասարումների լուծման վրա:

Վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքը

Դիտարկենք մեխանիկական համակարգ, որը գտնվում է հավասարակշռության վիճակում: Սովորաբար մեխանիկական համակարգերի վրա դրվում են տարբեր արտաքին կապեր՝ կոշտպատերի, չդեֆորմացվող թելերի և ձողերի, հոդակապերի և այլնի տեսքով: Համակարգի վրա կարող են ազդել ինչպես արտաքին ակտիվ ուժերը, օրինակ՝ ծանրության ուժ, շփման ուժ, արքիմեդյան ուժ և այլն, այնպես էլ կապերի հակազդեցության ուժերը, որոնց մեծությունները կախված են ակտիվ ուժերից: Այժմ ենթադրենք, որ համակարգը մի փոքր շեղվում է հավասարակշռության դիրքից, այնպես, որ համակարգի կետերի տեղաշարժերը լինեն չկաշկանդված մեխանիկական կապերի կողմից դրված սահմանափակումներով: Այլ կերպ ասած՝ այդ տեղափոխությունների արդյունքում կապերը չպետք է խզվեն (պատերը չփլուզվեն, թելերը չկտրվեն, իդեալական ձողերը չկտրվեն, չկարճանան, չերկարեն կամ չծռվեն և այլն): Նման շարժումները կոչվում են վիրտուալ և տարբերվում են համակարգի մասերի իրական շարժումներից, որոնք իրականում տեղի են ունենում կիրառված ուժերի ազդեցության ներքո: Վիրտուալ տեղաշարժերը համակարգի վրա դրված կապերի կողմից թույլատրելի փոքրիկ «մտացածին» տեղափոխություններ են, որոնք ներմուծվում են՝ հավասարակշռության պայմաններում ուժերի միջև կապերը բացահայտելու համար: Վիրտուալ տեղաշարժերը վերցվում են անսահման փոքր, որպեսզի համակարգի վրա ազդող ուժերը համարվեն անփոփոխ:

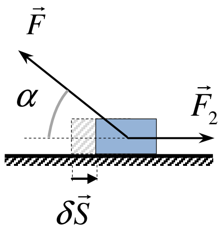
Ստացվում է այնպես, որ մեխանիկական համակարգի հավասարակշռության դիրքից ցանկացած վիրտուալ տեղաշարժի դեպքում բոլոր հակազդեցության ուժերի աշխատանքը հավասար է զրոյի: Դա պայմանավորված է նրանով, որ հակազդեցության ուժերը ուղղահայաց են հնարավոր տարրական տեղափոխություններին: Փաստորեն վիրտուալ տեղափոխությունների ընթացքում աշխատանք են կատարում միայն արտաքին ակտիվ ուժերը, որոնց էլ վերաբերում է վիրտուալ *տեղափոխությունների* սկզբունքը: Վերջինս կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ.

Հավասարակշռության դիրքից ցանկացած անսահման փոքր վիրտուալ տեղաշարժի դեպքում մեխանիկական համակարգի վրա գործող բոլոր ակտիվ ուժերի աշխատանքների գումարը հավասար է զրոյի:

Դիտարկենք այս սկզբունքի կիրառումը մեկ պարզ խնդրի լուծման օրինակով:

Խնդիր 1: Հորիզոնական հարթության վրա դրված չորսուի վրա ազդում է դեպի վեր ուղղված F ուժ, որը հարթության հետ կազմում է α անկյուն: Որքա՞ն է չորսուի վրա ազդող շփման ուժը, եթե չորսուն գտնվում է դադարի վիճակում:

Լուծում: Չորսուի վրա ազդում են $\vec{F}$ ուժը, ծանրության ուժը, հատակի կողմից ազդող հակազդեցության և դադարի շփման ուժերը: Պատկերացնենք, որ չորսուն ենթարկվում է շատ փոքր $\delta\vec{S}$ վիրտուալ տեղափոխության, օրինակ, դեպի աջ ուղղությամբ (նկար 1): Ինչպես արդեն նշել էինք, հակազդեցության ուժը աշխատանք չի կատարում: Այս դեպքում աշխատանք չի կատարում նաև ծանրության ուժը, քանի որ այն նույնպես ուղղահայաց է մարմնի վիրտուալ տեղափոխությանը: Այսպիսով աշխատանք են կատարում միայն $\vec{F}$ ուժն ու շփման ուժը: Վերջիններս հեշտ է որոշել՝ օգտվելով աշխատանքի սահմանումից և գծագրից.



Նկար 1.* $\vec{F}$ *և* $\vec{F}_2$ *ուժերը կատարում են աշխատանք* $\delta\vec{S}$ *վիրտուալ տեղափոխության ընթացքում

$$A_F = \vec{F}\cdot\delta\vec{S} = F\delta S\cos(180-\alpha) = -F\delta S\cos\alpha,$$

$$A_2 = \vec{F}_2\cdot\delta\vec{S} = F_2\delta S:$$

Համաձայն վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի՝ այս աշխատանքների գումարը պետք է հավասար լինի զրոյի՝

$$A_F + A_2 = 0,$$

Որից էլ որոնելի շփման ուժի համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը.

$$F_2 = F\cos\alpha:$$

Նշենք, որ մենք դիտարկեցինք մարմնի վիրտուալ տեղաշարժը՝ չփոխելով նրա վրա ազդող ուժերը: Հակառակ դեպքում, եթե դիտարկեինք մարմնի իրական սահքը դեպի աջ ուղղությամբ, ապա շփման ուժը կփոխեր իր ուղղությունը դեպի հակառակ կողմը:

Այս խնդիրը, իհարկե, կարելի է լուծել սովորական եղանակով՝ օգտվելով մարմինների հավասարակշռության ստանդարտ պայմաններից: Այս դեպքում երկու մեթոդների կիրառումներն էլ բարդության առումով համարժեք են: Դեռ ավելին, ուժային պրոյեկտման ստանդարտ ճանապարհը նույնիսկ ավելի կարճ է ու պարզ: Այնուամենայնիվ, շատ դեպքերում վիրտուալ տեղափոխությունների մեթոդի կիրառումը հանգեցնում է ավելի ռացիոնալ լուծման և երբեմն նույնիսկ թույլ է տալիս լուծել խնդիրներ, որոնք սկզբունքորեն անլուծելի են սովորական հավասարակշռության պայմանների կիրառման ճանապարհով: Մինչև ստատիկայի նման խնդրի քննարկումը ներկայացնենք սկզբունքի մի դրսևորում, որը կարող է օգտակար լինել դպրոցական ֆիզիկայում դրա կիրառության տեսանկյունից:

Դիտարկենք մասնավոր այն դեպքը, երբ շփման ուժերը բացակայում են, և մեխանիկական համակարգը Երկրի ձգողության դաշտում պահվում է հավասարակշռության մեջ՝ $\vec{F}$ ուժի օգնությամբ: Պատկերացնենք, որ $\vec{F}$ ուժի կիրառման կետը տեղափոխվում է $\delta\vec{S}$ -ով, որի հետևանքով մեխանիկական համակարգը ստանում է վիրտուալ տեղաշարժ, իսկ այդ ուժը կատարում է $A_F = \vec{F}\cdot\delta\vec{S}$ աշխատանք: Այդ ընթացքում ծանրության ուժը նույնպես կատարում է որոշակի աշխատանք, որը հավասար է համակարգի պոտենցիալ էներգիայի փոփոխությանը՝ հակառակ նշանով $A_G = -\delta E_\Pi$: Վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքից ստանում ենք.

$$A_F = \delta E_\Pi:$$

Ստացված բանաձևը կարելի է մեկնաբանել՝ ելնելով էներգետիկ նկատառումներից: Կարելի է պատկերացնել, որ $\vec{F}$ ուժի շատ փոքր չափով մեծացման արդյունքում մեխանիկական համակարգը դուրս է գալիս հավասարակշռության վիճակից: Քանի որ ուժի արժեքը գրեթե չի փոխվել, $\delta\vec{S}$ տեղափոխության ընթացքում այն կատարում է $\vec{F}\cdot\delta\vec{S}$ աշխատանք, որի հետևանքով համակարգի լրիվ մեխանիկական էներգիան աճում է: Դիտարկվող ուժը հավասարակշռության վիճակում ընդունած իր արժեքից անսահման քիչ է տարբերվում և անվերջ փոքր տեղաշարժի դեպքում համակարգի ձեռք բերած կինետիկ էներգիան կարելի է անտեսել: Հետևաբար, $\vec{F}$ ուժի ամբողջ աշխատանքը «ծախսվում է» համակարգի պոտենցիալ էներգիայի ավելացման վրա, որտեղից էլ ստանում ենք վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի՝ վերը քննարկված մասնավոր արդյունքը:

Այսպիսով, ստատիկայի դպրոցական խնդիրները կարելի է լուծել առնվազն երկու եղանակով՝ ստանդարտ ձևով, օգտվելով հավասարակշռության պայմաններից և վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի կամ, պատկերավոր ասած, «էներգետիկ մեթոդի» օգնությամբ: Հաշվի առնելով այս հանգամանքը՝ անհրաժեշտություն է առաջանում ավագ դպրոցի ֆիզիկայի դասընթացում էներգիայի պահպանման օրենքի ուսումնասիրումից հետո անդրադարձ կատարել ստատիկայի խնդիրների լուծմանը: Վերջինս կարևոր է նաև այն տեսակետից, որ ֆիզիկայի օլիմպիական բազմաթիվ խնդիրներ հնարավոր է լուծել հատկապես «էներգետիկ մեթոդի» կիրառմամբ: Պատահական չէ, որ որոշ գրքերում, այդ թվում նաև բազմաթիվ տարիների ընթացքում ֆիզիկայի օլիմպիադաների նախապատրաստվելու համար անփոխարինելի դարձած [1] ձեռնարկում մեխանիկական աշխատանքին ու էներգիային վերաբերող բաժինները նախորդում են ստատիկային: Ստորև կքննարկենք այդ ձեռնարկի մի խնդիր և ապա դրա ընդհանրացումն ու զարգացումը՝ աստիճանական բարդացման սկզբունքով [1, 97]:

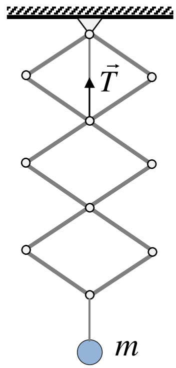
Խնդիր 2ա: Գտեք թեթև հոդակապային կախիչի վերին շեղանկյան հոդակապերի առանցքները միացնող թելի լարման ուժը (նկար 2): Բեռի զանգվածը m է:

Լուծում: Պարզ է, որ ստանդարտ եղանակով՝ ուժերի ու մոմենտների հավասարակշռության պայմանների կիրառմամբ այս խնդիրը կամ շատ դժվար է կամ էլ գործնականում հնարավոր չէ լուծել: Սակայն խնդիրը հեշտությամբ կարելի է լուծել վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի կիրառմամբ: Բավական է դիտարկել հավասարակշռության վիճակից համակարգի փոքր շեղումը, երբ նկար 2-ում պատկերված թելի լարման $\vec{T}$ ուժի ազդման կետը բարձրանում է δh չափով: Երկրաչափական նկատառումներից պարզ է, որ նման վիրտուալ տեղաշարժի արդյունքում m բեռը կբարձրանա $3\delta h$-ով, և հետևաբար համակարգի պոտենցիալ էներգիան կաճի $3mg\delta h$ -ով: Համաձայն վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի, ինչը այս իրավիճակում արտահայտում է էներգիայի փոփոխության թեորեմը, թելի լարման ուժի աշխատանքը հավասար է համակարգի պոտենցիալ էներգիայի աճին՝

$$T\delta h = 3mg\delta h,$$

Որտեղից էլ ստանում ենք

$$T = 3mg:$$



Նկար 2. Կախիչը գտնվում է հավասարակշռության վիճակում վերին շեղանկյան հոդակապերը միացնող թելի օգնությամբ

Այժմ ներկայացնենք դիտարկված խնդրի ընդհանրացումը, երբ հաշվի է առնվում կախիչի զանգվածը [2, 97-98]:

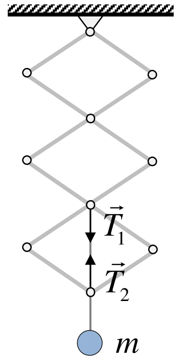
Խնդիր 2բ: Գտեք հոդակապային կախիչի վերին շեղանկյան հոդակապերի առանցքները միացնող թելի լարման ուժը: Կախիչի համասեռ ձողերի և դրանց միացումներում տեղադրված միանման հոդակապերի գումարային զանգվածը M է, բեռի զանգվածը՝ m :

Լուծում: Այս դեպքում էլ խնդրի լուծման մոտեցումը մնում է նույնը, սակայն անհրաժեշտություն է առաջանում հաշվի առնել նաև վիրտուալ տեղափոխության արդյունքում կախիչի ձեռք բերած պոտենցիալ էներգիան: Քանի որ կախիչի ձողերը համասեռ են, իսկ հոդակապերը՝ միատեսակ, ապա գծագրից ակնհայտ է, որ դրա զանգվածների կենտրոնը գտնվում է մեջտեղի շեղանկյան կենտրոնում: Երկրաչափական նկատառումներից պարզ է նաև, որ եթե կախիչի ներքևի հոդակապը բարձրանա $3\delta h$-ով, ապա այդ կենտրոնը կբարձրանա $3\delta h/2$-ով, ինչի արդյունքում կախիչի պոտենցիալ էներգիան կստանա $3Mg\delta h/2$ աճ: Այս դեպքում արդեն համակարգի պոտենցիալ էներգիայի փոփոխությունը կլինի $\delta E_{\Pi} = 3mg\delta h + 3Mg\delta h/2$ և վիրտուալ տեղափոխություններ սկզբունքից կստանանք.

$$T\delta h = 3mg\delta h + 3Mg\delta h/2 \Rightarrow T = 3g(m + M/2):$$

Վերը քննարկված խնդրի հետ ծանոթացումից հետո օգտակար կլինի աշակերտներին առաջադրել լուծել դրա բարդացված տարբերակը, երբ թելով ամրացված են կախիչի ստորին շեղանկյան հոդակապերը: Ստորև կվերլուծենք այդ խնդիրը:

Խնդիր 2գ: Գտեք հոդակապային կախիչի ներքևի շեղանկյան հոդակապերի առանցքները միացնող թելի լարման ուժը (նկար 3): Կախիչի համասեռ ձողերի և դրանց միացումներում տեղադրված միանման հոդակապերի գումարային զանգվածը M է, բեռի զանգվածը՝ m:



Նկար 3. Կախիչը գտնվում է հավասարակշռության վիճակում ստորին շեղանկյան հոդակապերը միացնող թելի օգնությամբ

Լուծում: Առաջին հայացքից կարող է թվալ, թե նոր դրվածքով խնդիրը քիչ է տարբերվում նախորդ տարբերակից: Սակայն, եթե դիտարկենք կախիչի վիրտուալ տեղաշարժ, ապա, ի տարբերություն նախորդ դեպքի, այժմ արդեն կտեղաշարժվեն թելի երկու միացման կետերը և երկու լարման ուժերն ($\vec{T}_1, \vec{T}_2$) էլ կկատարեն աշխատանք: Պարզ է, որ եթե թելը փոխարինենք հոդակապերի վրա ազդող $\vec{T}_1$ և $\vec{T}_2$ ուժերով, ապա համակարգի հավասարակշռությունը չի խախտվի: Քանի որ թելի կշիռը կարելի է անտեսել, $T_1 = T_2 = T$: Այժմ դիտարկենք կախիչի վիրտուալ տեղափոխություն, որի ընթացքում նրա վերևի շեղանկյան ներքևի հոդակապը բարձրանում է δh-ով: Կինեմատիկ ակնկալպերը մյուս երկու շեղանկյուններին ևս կստիպեն «սեղմվել» միևնույն δh չափով: Արդյունքում $\vec{T}_1$ և $\vec{T}_2$ ուժերի ազդման կետերը համապատասխանաբար կստանան $2\delta h$ և $3\delta h$ վիրտուալ տեղափոխություններ: Քանի որ $\vec{T}_2$ ուժը համուղղված է տեղափոխության, իսկ $\vec{T}_1$-ը՝ հակուղղված, դրանց կատարած գումարային աշխատանքը կլինի.

$$T_2 3\delta h - T_1 2\delta h = T\delta h:$$

Համակարգի պոտենցիալ էներգիայի փոփոխությունը, ինչպես և նախորդ դեպքում, որոշվում է բեռի և կախիչի պոտենցիալ էներգիաների գումարային աճով՝ $\delta E_\Pi = 3mg\delta h + 3Mg\delta h/2$: Հաշվի առնելով այս ամենը՝ վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքից ստանում ենք.

$$T = 3g(m + M/2):$$

Լուծման ընթացքից պարզ է, որ թելի լարման ուժը կլինի նույնը, եթե այն միացվի կախիչի մեջտեղի շեղանկյան վերևի ու ներքևի հոդակապերից: Կարելի է առաջարկել սովորողներին, ելնելով քննարկված խնդրի լուծման ընթացքից, կարճ դատողությունների միջոցով ցույց տալ, որ թելի լարման ուժը չի փոխվի, եթե այն միացվի կախիչի մեջտեղի շեղանկյան վերևի ու ներքևի հոդակապերից: Աշակերտները կարող են իրենք առաջարկել միացումների այլ տարբերակներ և դրանցից ընտրել այն դեպքը, երբ թելի լարումը նվազագույնն է:

Վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի հնարավոր կիրառությունները մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում

Աշխատանքի առաջին մասում մանրամասն ներկայացրինք վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի էությունն ու վերջինիս հնարավոր արդյունավետ կիրառությունները ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացի տարբեր ոչ տիպային խնդիրներ լուծելիս:

Ստորև, օգտվելով վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի էությունից և գիտական ճանաչողության հիմնական մեթոդներից մեկից, այն է՝ համանմանության մեթոդից, հանրահաշվական տարբեր ոչ տիպային երկու փոփոխական պարունակող անհավասարությունների ապացուցման համար կառաջարկենք այլ մոտեցում՝ ֆորմալ առումով հիմնված վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի «գործիքակազմի» վրա:

Ինչպես արդեն նշել ենք, վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի համաձայն նախապես երևույթը դիտարկում ենք, երբ մարմինը գտնվում է հավասարակշռության վիճակում, որից հետո մտովի մարմնին վիրտուալ ձևով «հաղորդում» ենք որոշակի տեղափոխություն և այդ պայմաններում նորովի ուսումնասիրում քննարկվող երևույթը: Այժմ վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի այս փուլերը «տեղայնացնենք» երկու փոփոխական պարունակող անհավասարությունների ապացուցման պրոցեսում՝ ըստ ստորև ներկայացվող աղյուսակի:

Աղյուսակ 1

Համանմանության աղյուսակ

Ֆիզիկայում կիրառվող վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի և հանրահաշվում հանդիպող տարբեր ոչ տիպային երկու փոփոխական պարունակող անհավասարությունների ապացուցման փուլերի համանմանությունը	
I փուլ	
դիտարկել մարմնի վրա ազդող ուժերը հավասարակշռության դեպքում	*երկու փոփոխական պարունակող անհավասարությունն ապացուցել փոփոխականների հավասարության դեպքում*
II փուլ	
մտովի մարմնին վիրտուալ ձևով «հաղորդել» որոշակի տեղափոխություն և այդ պայմաններում նորովի ուսումնասիրել քննարկվող երևույթը	*մտովի փոփոխականներից մեկին «հաղորդել» 2ε $(\varepsilon > 0)$ չափով աճ և դիտարկվող անհավասարությունն ապացուցել 2ε չափով միմյանցից տարբերվող փոփոխականների պարագայում*

Այժմ վերը նկարագրած փուլերի կիրառմամբ դիտարկենք և ապացուցենք մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող երկու անհավասարություններ:

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ կամայական x և y իրական թվերի համար, երբ $x^2 + y^2 \leq 2$ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $|x + y| \leq 2$ [4, 9]:

Լուծում: Անհավասարությունն ապացուցենք աղյուսակ 1-ում նշված փուլերով:

I փուլ: Հեշտ է նկատել, որ $x = y = \alpha \in R$ դեպքում տրված ելակետային անհավասարությունը ճշմարիտ է: Իրոք, ունենք՝

$$x^2 + y^2 \leq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 1 \Rightarrow |\alpha| \leq 1 \Rightarrow |x + y| = 2|\alpha| \leq 2:$$

II փուլ: Այժմ, առանց ընդհանրությունը խախտելու, տրված անհավասարությունն ապացուցենք $x > y$ դեպքում: Այս պարագայում x և y փոփոխականները կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝ $x = \alpha + \varepsilon$ և $y = \alpha - \varepsilon$, որտեղ $\alpha; \varepsilon \in R$ և $\varepsilon > 0$: Ըստ այդմ տրված ելակետային անհավասարությունից կստանանք՝

$$x^2+y^2\le 2 \;\Leftrightarrow\; \alpha^2+\varepsilon^2\le 1 \Rightarrow |x+y|=2|\alpha|=2\sqrt{\alpha^2}=2\sqrt{1-\varepsilon^2}\le 2,$$

ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Ստորև վերոգրյալ մոտեցման կիրառմամբ ապացուցենք մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող մեկ անհավասարություն, որի միջոցով հնարավոր է գնահատել կամայական երկու իրական թվերի միջին թվաբանականի և միջին երկրաչափականի տարբերության ստորին և վերին եզրերը:

Խնդիր2: Ապացուցել անհավասարությունը՝

$\dfrac{(a-b)^2}{8a}\le\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\le\dfrac{(a-b)^2}{8b}$, որտեղ $a;b\in R$ և $a\ge b>0$ [4, 8]:

Լուծում: Տրված կրկնակի անհավասարությունն ապացուցենք աղյուսակ 1-ում նշված փուլերով:

I փուլ: Հեշտ է նկատել, որ $a=b$ դեպքում տրված ելակետային կրկնակի անհավասարությունը ճշմարիտ է:

II փուլ: Այժմ տրված կրկնակի անհավասարությունն ապացուցենք $a>b$ դեպքում: Այս պարագայում, առանց ընդհանրությունը խախտելու, a և b փոփոխականները կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝ $a=\alpha+\varepsilon$ և $b=\alpha-\varepsilon$, որտեղ $\alpha;\varepsilon\in R$ և $\alpha>\varepsilon>0$: Ըստ այդմ տրված ելակետային անհավասարությունից կստանանք՝

$$\frac{\varepsilon^2}{2(\alpha+\varepsilon)}\le\alpha-\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}\le\frac{\varepsilon^2}{2(\alpha-\varepsilon)}\Leftrightarrow\frac{\varepsilon^2}{2(\alpha+\varepsilon)}\le\frac{\varepsilon^2}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}}\le\frac{\varepsilon^2}{2(\alpha-\varepsilon)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha+\varepsilon)\ge\alpha+\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}\ge 2(\alpha-\varepsilon):$$

Ունենք՝

$$2(\alpha+\varepsilon)=\alpha+\alpha+2\varepsilon>\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}+\alpha+2\varepsilon>\alpha+\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(\alpha+\varepsilon)>\alpha+\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2},$$

մյուս կողմից նկատենք, որ

$$\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}+2\varepsilon=\sqrt{\left(\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}+2\varepsilon\right)^2}=\sqrt{\alpha^2+4\varepsilon\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}+3\varepsilon^2}>\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha+\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}\ge 2(\alpha-\varepsilon)$$

և, ուրեմն,

$$2(\alpha+\varepsilon)\ge\alpha+\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}\ge 2(\alpha-\varepsilon)\Leftrightarrow\frac{(\alpha-b)^2}{8\alpha}\le\frac{\alpha+b}{2}-\sqrt{ab}\le\frac{(\alpha-b)^2}{8\alpha},$$

հետևաբար տրված ելակետային անհավասարությունը ճշմարիտ է, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Եզրակացություն

Վիրտուալ տեղափոխությունների սկզբունքի հիմնական գաղափարը, որը ներկայացված է սույն հոդվածում, համապատասխան օրինակների միջոցով դրա կիրառություններն ու մեթոդական բնույթի ցուցումները կարող են օգտակար լինել սովորողներին՝ այդ մեթոդի ազատ և հմուտ կիրառման հարցում: Զարգացնելով վերլուծական և տրամաբանական մտածողություն նմանատիպ մոտեցումները՝ նաև լրացնում են սովորողների գիտելիքների պաշարը և հարստացնում հմտությունների զինանոցը, ինչը կարող է նպաստել ֆիզիկայի նկատմամբ հետաքրքրության աճին:

DOI: https://doi.org/10.58726/27382923-ne2023.2-51

Գրականություն

1. Վորոբյով Ի. Ի., Զուբկով Պ. Ի., Կուտուզովա Գ. Ա., Սավչենկո Օ. Յա., Տրուբաչյով Ա. Մ., Խարիտոնով Վ. Գ., Ֆիզիկայի խնդիրներ: Ուսումնական ձեռնարկ / Օ. Յա. Սավչենկոյի խմբագրությամբ/: Երևան, «Տիգրան Մեծ», 2008, 528 էջ:
2. Бутиков Е.И., Быков А.Л., Кондратьев А.С. Физика для поступающих в вузы. М.: Наука, 1982, 608 с.
3. Варламов А., Шапиро А. Метод виртуальных перемещений, Квант, 1980, N 2, с. 9-13.
4. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах, М.: Наука, 1967, - 304 с.
5. Chernoutsan A. Method of virtual displacements, Meeting of Modern Science and School Physics: College for School Teachers of Physics in ICTP, 2011.
6. CoopersmithJ. The Lazy Universe: An Introduction to the Principle of Least Action Oxford U.P., New York, 2017, 267 p. https://doi.org/10.1119/1.5024210
7. Feynman R., Leighton R. and Sands M. The Feynman Lectures on Physics boxed set: The New Millennium Edition, New Millennium ed., 2014, 1552 p.
8. Feynman R., Leighton R. and Sands M. Exercises for the Feynman Lectures on Physics: The New Millennium Edition, New Millennium ed., 2014, 320 p.

Некоторые применения принципа виртуальных перемещений в курсе физики и математики

Вардан Манукян

Резюме

Ключевые слова: *задача, сила, статика, работа, аналогия, неравенство, доказательство*

Данная работа посвящена школьному применению принципа виртуальных перемещений. Значение последнего обусловлено важностью энергетических подходов в физике, с которыми связан этот принцип. Строгое и полное доказательство принципа, а также различных его приложений можно осуществлять только в университетских курсах механики. Однако если суть принципа интерпретировать просто, то даже в рамках школьного курса физики его можно эффективно использовать в процессе решения задач статики. Следует отметить, что некоторые задачи статики очень трудно решить, рассматривая стандартные условия равновесия сил и моментов. В таких случаях применение принципа виртуальных перемещений становится практически единственно возможным подходом к решению этих задач. Хотя упомянутый принцип может иметь интересное применение, он еще не успел получить должного распространения в процессе преподавания физики. В данной работе, в рамках школьной физики, доступным образом изложен принцип виртуальных перемещений. Затем вышеупомянутые идеи использованы как при решении задач статики, так и в процессе решения математических неравенств, что и составляет научно-методическую новизну работы. В статье, с помощью простого примера, сначала представлена суть принципа виртуальных перемещений, а затем рассмотрен ряд постепенно усложняющихся задач статики. В последней части статьи, с помощью некоторых аналогий, применяются идеи принципа при решении неравенств в математике.

Some Applications of the Principle of Virtual Displacements in Physics and Mathematics Courses

Vardan Manukyan

Summary

Key words: *problem, force, statics, work, analogy, inequality, proof*

The work is devoted to the school application of the principle of virtual displacements. The latter is significant since it is related to the importance of energy approaches in physics with which this principle is associated. Only in university mechanics courses can the idea and its many applications be rigorously and completely proven. However, if the essence of the principle is simply interpreted, then even in the confines of a school physics course it can be effectively used in the process of solving statics problems. It should be noted that it can be challenging to answer some statics problems by taking standard equilibrium conditions of forces and torques into account. In such cases, the only viable method for the solution of these problems is to apply the virtual displacements idea. Although this principle may have interesting applications, it has not been widely used in physics teaching yet. The work's scientific and methodological novelty lies in its clear presentation of the principle of virtual displacements within the context of school physics. These concepts are then applied to the solution of mathematical inequalities as well as statics problems. Using a straightforward example, the article first explains the fundamentals of the idea of the virtual displacement, then examins a sequence of progressively intricate statics. In the article's last section, with the help of some analogies, the concepts of the principle are applied to solve mathematical inequalities.

Ներկայացվել է 09.10..2023 թ.
Գրախոսվել է 24.10.2023 թ.
Ընդունվել է տպագրության 23.11.2023 թ.